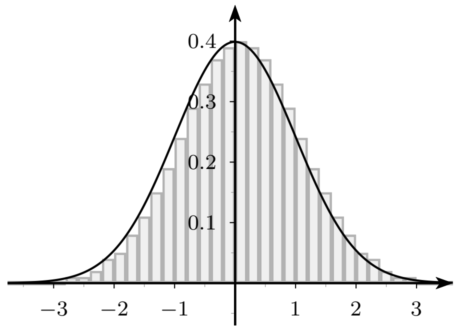
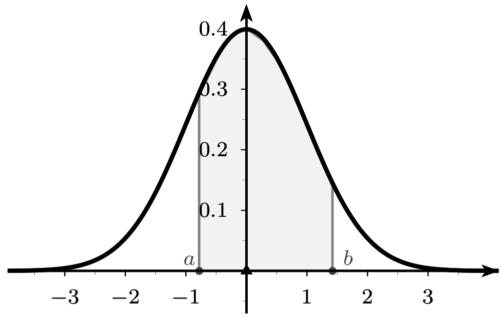
# 1 Loi normale centrée réduite




Soit $X_n$ une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $B(n;p)$.
Si on fixe $p$ et que l'augmente $n$, l'histogramme représentant les valeurs prises par $X_n$ semble se rapprocher d'une courbe en cloche.
Si $p$ varie la courbe en cloche change de caractéristiques c'est à dire d'étalement, de hauteur.

Par contre si on considère la variable aléatoire $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{npq}}$, on s'aperçoit que quel que soit $p$ la courbe en cloche semble être toujours la même ; c'est ce que dit le théorème ci-dessous de Moivre-Laplace.

Théorème de Moivre-Laplace




$X_n$ est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $B(n,p)$.
On pose $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.
Quels que soient les réels $a$ et $b$ avec $a < b$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} P(a \leqslant Z_n \leqslant b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t.$$

# 2 La loi N(0 ;1)

Définition et propriété :

La fonction $\phi$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ est appelée **fonction de Laplace-Gauss**.

Elle est continue, positive et $\lim\limits_{x\to-\infty} \int_x^0 \varphi(t)\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x \varphi(t)\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}$.
Donc $\varphi$ est une fonction de densité sur $\mathbb{R}$. La loi normale standard (ou loi normale centrée réduite) N(0 ;1) admet la fonction $\varphi$ précédente comme fonction densité.

Propriété :
Si $X$ est une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite N(0 ;1) alors l'espérance de $X$ est 0 et son écart-type est 1.

Remarques :

1. On ne connaît pas de primitive qui peut s'écrire à l'aide de fonctions connues, à la fonction $\varphi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.
   Donc la plupart des calculs liés à la loi normale sont approchés.
2. Il est conseillé de s'appuyer sur le graphique de la fonction $\varphi$ pour visualiser en termes d'aires les calculs que l'on doit faire avec la loi normale centrée réduite.
3. La fonction $\varphi$ est paire ; donc la courbe représentant $\varphi$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
4. L'aire totale sous la courbe est 1.

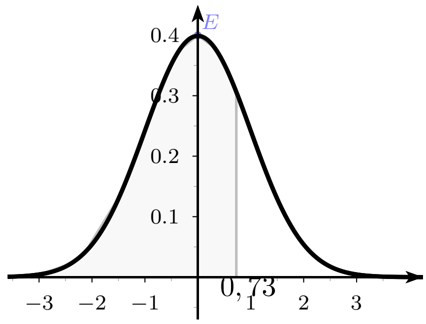
Définition et propriété :

Soit $Z$ une variable aléatoire suivant la loi normale standard N(0 ;1). On pose pour tout réel $x$, $\boxed{\Phi(x) = P(Z \leqslant x)}$.
La fonction $\Phi$ s'appelle la fonction de répartition de $Z$. $\Phi$ ne peut pas s'exprimer à l'aide des fonctions élémentaires. Les tableurs et les calculatrices permettent d'obtenir des valeurs approchées.(voir p 422)

Exercice 1 :

$X$ est une variable aléatoire qui suit la loi normale N(0 ;1).

Question 1 : On va chercher sur la calculatrice la probabilité de l'événement $X \leqslant 0,73$.
Il s'agit en fait de savoir combien vaut l'aire ci-contre.
On va diviser l'aire en deux parties : $P(X < 0)$ et $P(0 < X < 0,73)$.
Utilisation des calculatrices pour la loi N(0 ;1)




1. Avec Texas Instruments
   Sur TI 83fr : 2ND VARS NormalFRep(0,0.73,0,1) NormalFRep $(a, b, \mu, \sigma)$
   Sur TI 84 : 2ND VARS Normalcdf(0,0.73,0,1) Normalcdf $(a, b, \mu, \sigma)$
2. Avec Casio Graph35+
   MENU STAT DIST NormCD(0,0.73,1,0) NormCD$(a, b, \sigma, \mu)$

On doit obtenir : $P(X < 0,73) = P(X < 0) + P(0 < X < 0,73) = \Phi(0) + \ldots\ldots.. = 0,5 + \ldots\ldots\ldots\ldots. = 0,7673$.

Question 2 : Déduire de la question précédente et des propriétés du graphique les probabilités suivantes :

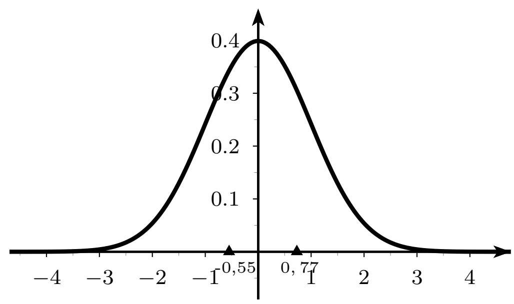
$P(X > 0,73) = \ldots\ldots$ $P(X \leqslant -0,73) = \ldots\ldots$ $P(X \geqslant -0,73) = \ldots\ldots.$

Question 3 :

1. A l'aide de la calculatrice, donner :

   $P(X \leqslant -0,55) = \Phi(-0,55) = \ldots\ldots$
   $P(X \leqslant 0,77) = \Phi(0,77) = \ldots\ldots$ .
2. Hachurer sur le dessin ci-contre l'aire permettant de donner $P(-0,55 \leqslant X \leqslant 0,77)$
3. En déduire des deux questions précédentes le calcul de :

   $P(-0,55 \leqslant X \leqslant 0,77) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
4. En déduire la formule générale donnant $P(a \leqslant X \leqslant b)$ en fonction de $\Phi(b)$ et $\Phi(a)$.




Question 4 : Exprimer $\Phi(-x)$ en fonction de $\Phi(x)$.

**Intervalle centré en 0 de probabilité donnée**

Théorème exigible : ROC

Soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $N(0;1)$. Pour tout réel $\alpha \in ]0;1[$, il existe un unique réel positif $u_\alpha$) tel que :

$P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$.

Démonstration exigible
On doit résoudre l'équation suivante (E) : $P(-x \leqslant X \leqslant x) = 1 - \alpha$

$P(-x \leqslant X \leqslant x) = 1 - \alpha \Leftrightarrow \Phi(x) - \Phi(-x) = 1 - \alpha$.

Or $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ donc (E) devient : $2\Phi(x) - 1 = 1 - \alpha \Leftrightarrow \Phi(x) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$
Comme $\varphi$ est continue et positive, $\Phi$ est dérivable et de dérivée $\varphi$ donc $\Phi$ est continue et strictement croissante sur $[0 : +\infty[$.

De plus $\Phi(0) = \dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} \Phi(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \int_{-\infty}^{t} \varphi(x)\mathrm{d}x = 1$.

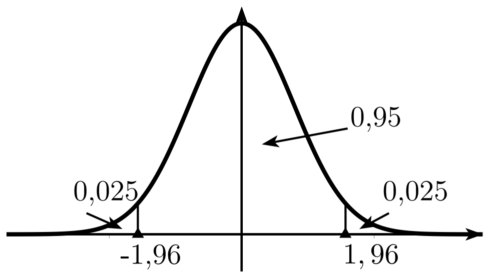
Or comme $\alpha \in ]0;1[$, $\dfrac{1}{2} < 1 - \dfrac{\alpha}{2} < 1$.

D'après le tableau de variation et le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un seul réel $u_\alpha$ de $[0 : +\infty[$ tel que $\Phi(u_\alpha) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$ donc $P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$.

Cas particuliers :

Pour $\alpha = 0,05$ on a : $u_\alpha \simeq 1,96$

Pour $\alpha = 0,01$ on a : $u_\alpha \simeq 2,58$




Pour chercher $k$ tel que $P(X < k) = \alpha$ où $\alpha$ est connu

Déterminer une valeur approchée de $k$ pour que $P(X \leqslant k) = 0,72$ où $X$ suit la loi normale $N(0;1)$.

1. Avec Texas Instruments
   Sur TI 83fr : 2ND VARS FracNormale(0.72) FracNormale ($k$)
   Sur TI 84 : 2ND VARS InvNorm(0.72) InvNorm ($k$)
2. Avec Casio Graph35+
   MENU STAT DIST invNormCD(0.73,1,0) invNormCD($k, \sigma, \mu$)

On trouve $k \simeq 0,583$.

Exemple :
Déterminer une valeur approchée de $k$ pour que $P(X \geqslant k) = 0,58$ où $X$ suit la loi normale $N(0;1)$.

$P(X \geqslant k) = 0,58 \iff 1 - P(X < k) = 0,58 \iff P(X < k) = 0,62 \iff k \simeq 0,305$.

Exemple :
Déterminer une valeur approchée de $k$ pour que $P(-k \leqslant X \leqslant k) = 0,43$ où $X$ suit la loi normale $N(0;1)$.

$P(-k \leqslant X \leqslant k) = 2P(X \leqslant k) - 1$ donc le problème devient
$2P(X \leqslant k) - 1 = 0,43 \iff P(X < k) = \dfrac{1 + 0,43}{2} \iff k \simeq 0,568$.

## 3 Loi normale $N(\mu;\sigma^2)$

Définition :

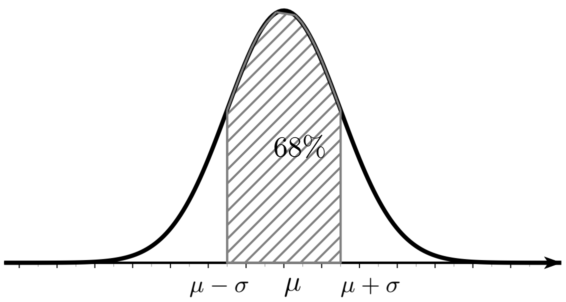
Soit $\mu$ un réel et $\sigma$ un réel strictement positif.

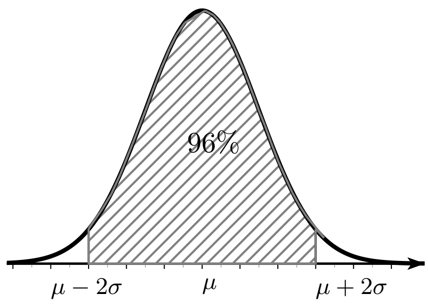
On dit que la variable aléatoire $X$ suit la loi normale $N(\mu;\sigma^2)$ si la variable aléatoire $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $N(0;1)$.

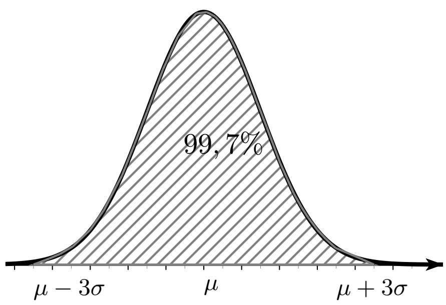
Propriétés :

Si $X$ suit la loi normale $N(\mu;\sigma^2)$ alors

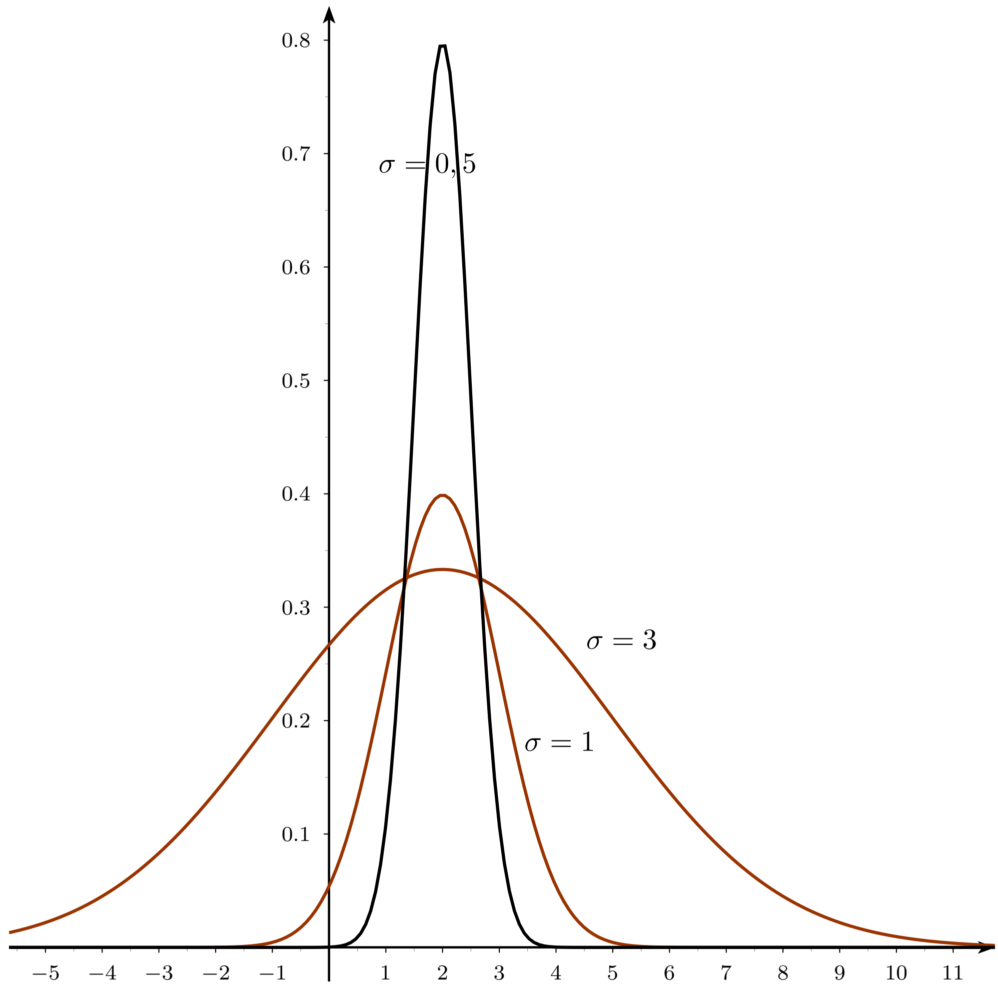
1. L'espérance de $X$ est $\mu$ et la variance de $X$ est $\sigma^2$.
2. $P(\mu-\sigma \leqslant X \leqslant \mu+\sigma) \simeq 0,683$.
3. $P(\mu-2\sigma \leqslant X \leqslant \mu+2\sigma) \simeq 0,954$.
4. $P(\mu-3\sigma \leqslant X \leqslant \mu+3\sigma) \simeq 0,997$.



Rôle de l'écart-type $\sigma$ dans la loi normale $N(\mu, \sigma^2)$




Plus $\sigma$ est petit, plus la courbe est resserrée autour de la moyenne $\mu$.

Exercice 1

$X$ suit la loi normale $N(15; 2^2)$. On veut donner une valeur approchée à la calculatrice de $P(2 \leqslant X \leqslant 16)$.

1. Avec Texas Instruments
   Sur TI 83fr : 2ND VARS NormalFRep(2,16,15,2) NormalFRep $(a, b, \mu, \sigma)$
   Sur TI 84 : 2ND VARS Normalcdf(2,16,15,2) Normalcdf $(a, b, \mu, \sigma)$
2. Avec Casio Graph35+
   MENU STAT DIST NormCD NormCD(2,16,2,15)) NormCD$(a, b, \sigma, \mu)$

On doit trouver : $P(2 \leqslant X \leqslant 16) \simeq 0,6915$.

Exercice 2

$X$ suit la loi normale $N(15; 4)$.

1. $P(X \leqslant 16) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
2. $P(10 \leqslant X \leqslant 20) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
3. Déterminer un intervalle centré en 15 tel que $P(X \in I) \simeq 0,68$.

Exercice 3

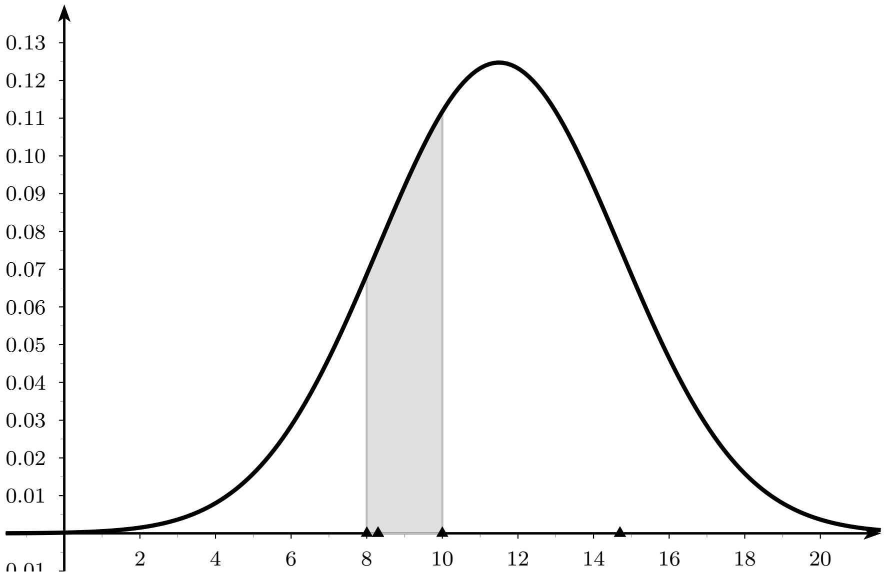
Une machine produit des pièces dont le diamètre $D$ en dixième de millimètres suit une loi $N(155, \sigma^2)$. Une pièce est acceptée si $D \in [152; 158]$.

Quelle est la probabilité qu'une pièce soit acceptée si :

a) $\sigma^2 = 4$ b) $\sigma^2 = 9$ c) $\sigma^2 = 1$.

Exercice 4

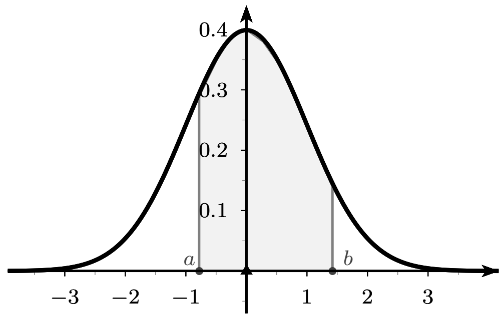
Un chercheur a étudié l'âge moyen auquel les premiers mots du vocabulaire apparaissent chez les jeunes enfants. L'étude montre que l'âge $X$ d'apparition (en mois) des premiers mots suit une loi normale de moyenne 11,2 et d'écart-type 3,2.
On a tracé la courbe représentant la densité de la loi $N(11, 5; 3, 2^2)$. Répondre à chaque question en montrant de quelle aire il s'agit.




1. Donner la probabilité qu'un enfant ait prononcé ses premiers mots entre 8 et 10 mois.
2. Donner la probabilité qu'un enfant ait prononcé ses premiers mots avant 7 mois.
3. Donner la probabilité qu'un enfant ait prononcé ses premiers mots après 10 mois.
4. Déterminer un intervalle I centré autour de la moyenne qui permette d'affirmer : « la probabilité que l'âge d'apparition des premiers mots appartient à I est 95%. »

# 4 Approximation normale d'une loi binomiale

Théorème de Moivre-Laplace




$X$ est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $B(n, p)$.
On pose $Z = \dfrac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.
Quels que soient les réels $a$ et $b$ avec $a < b$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} P(a \leqslant Z \leqslant b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t.$$

Remarque
Pour $n \geqslant 30$ $\quad np \geqslant 5$ $\quad n(1-p) \geqslant 5$, l'erreur sur les probabilités calculées est très faible. **On ne fera l'approximation que lorsque ces trois conditions sont vérifiées.**

Exemple
Soit $X$ une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $B(36, 0, 5)$. Les trois conditions sont remplies :

$n \geqslant 30$ $\qquad np = 18$ donc $np \geqslant 5$ et $n(1-p) = 18$ donc $n(1-p) \geqslant 5$.

Calculons $P(17 \leqslant X \leqslant 19)$ :
$P(17 \leqslant X \leqslant 19) \approx P(16,5 \leqslant X \leqslant 19,5)$ en utilisant **la correction de continuité**.

$P(16,5 \leqslant X \leqslant 19,5) = P(-0,5 \leqslant Z \leqslant 0,5)$ en réduisant et en centrant la variable aléatoire $X$.

$P(-0,5 \leqslant Z \leqslant 0,5) = \Phi(0,5) - \Phi(-0,5) \approx 0,383$

**Conclusion :** $\boxed{P(17 \leqslant X \leqslant 19) \approx 0,38}$.

Que se passe-t-il si la **la correction de continuité** n'est pas utilisée ?

Exercice 1 :

$X$ suit une loi binomiale $B(50; 0,6)$. On pose $Y = \dfrac{X - 30}{\sqrt{50 \times 0,6 \times 0,4}}$. On assimile $Y$ à une variable aléatoire suivant une loi $N(0; 1)$.

1. Quel théorème permet de justifier l'approximation ?
2. En déduire une valeur approchée de $P(28 \leqslant X \leqslant 32)$.

Exercice 2 :

On lance 18000 fois de suite un dé cubique parfait avec les faces numérotées de 1 à 6.

1. Soit $X$ la variable aléatoire égale au nombre de 6 apparus. Donner la loi suivie par $X$. Calculer son espérance, $\mu$ et son écart-type, $\sigma$.
2. On admet que la variable aléatoire $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ suit la loi normale $N(0; 1)$.
   Montrer que $P(2850 \leqslant X \leqslant 3150) = P(-3 \leqslant Z \leqslant 2)$ puis donner une valeur approchée au millième de cette probabilité.